SÉRIE II : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

On considère les équations différentielles (ED) linéaires du premier et deuxième ordre de la forme

$$y' + a(x)\, y = b(x) \qquad (E_1)$$

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x) \qquad (E_2)$$

où les fonctions a, b et c (à priori à valeurs complexes) sont continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème : (Cauchy - Lipschitz)

Les ED (E_1) et (E_2) ont une solution unique étant donnée une condition initiale (CI), $y(x_0)$ pour (E_1) et $(y(x_0), y'(x_0))$ pour (E_2), dans un voisinage suffisamment petit de x_0.

On dénote également (E_1') et (E_2') les équations homogènes (EH), ie sans second membre, associées aux ED (E_1) et (E_2), ie

$$y' + a(x)\, y = 0 \qquad (E_1')$$

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0 \qquad (E_2')$$

Les équations (E_1) et (E_2), avec second membre, seront ainsi parfois appelées équations inhomogènes (EI).

Exo 1 : l'objectif de cet exercice est d'étudier la structure d'espace vectoriel des espaces des solutions des EH (E'_1) et (E'_2) sur un intervalle $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.

Soit tout d'abord $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues d'une variable réelle et à valeurs complexes. On sait que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (EV) lorsqu'il est muni de

i) la loi $+$ d'addition des fonctions

ii) la loi $\cdot$ de multiplication d'une fonction par un scalaire (complexe ici).

On dénote par $O_{\mathcal{F}}$ l'élément neutre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour la loi $+$. L'analyse ci-dessous de l'espace des solutions de (E'_1) peut être directement étendue à l'espace des solutions de (E'_2).
Soit maintenant $\mathcal{E}'_1$ l'espace des solutions de l'EH (E'_1) sur un intervalle $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, ie

$$\mathcal{E}'_1 = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; \forall x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \,, \quad f' + a(x) f = O_{\mathcal{F}} \right\}$$

Théorème : $\mathcal{E}'_1$ est un $\mathbb{C}$-EV

preuve : il est commode de montrer que $\mathcal{E}'_1$ est en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, ce qui se fait en trois étapes

(i) puisque par construction les éléments de $\mathcal{E}'_1$ sont des éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il est clair que

$$\mathcal{E}'_1 \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

(ii) $\mathcal{E}'_1$ est non vide : en effet, par construction de l'élément neutre $0_{\mathcal{F}^2}$ de $\mathcal{F}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a

$$0'_{\mathcal{F}^2} + a(x)\, 0_{\mathcal{F}^2} = 0_{\mathcal{F}^2} + 0_{\mathcal{F}^2} = 0_{\mathcal{F}^2}$$

soit donc

$$0_{\mathcal{F}^2} \in \mathcal{E}'_1$$

(iii) $\mathcal{E}'_1$ est stable par combinaisons linéaires : en effet, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tous éléments f et g de $\mathcal{E}'_1$, on a (par la linéarité de la dérivée)

$$(\lambda f + g)' + a(x)(\lambda f + g) = \lambda(f' + a(x) f) + g' + a(x) g$$
$$= \lambda\, 0_{\mathcal{F}^2} + 0_{\mathcal{F}^2} = 0_{\mathcal{F}^2}$$

soit donc

$$\lambda f + g \in \mathcal{E}'_1 \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \;,\; \forall f, g \in \mathcal{E}'_1$$

$\Rightarrow$ les trois points (i)-(iii) ci-dessus montrent que $\mathcal{E}'_1$ est en effet un sous-EV de $\mathcal{F}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, ce qui assure bien en particulier que $\mathcal{E}'_1$ est lui-même un $\mathbb{C}$-EV. ▨

De plus, on montre que

Théorème : $\mathcal{E}'_1$ est de dimension au plus 1

preuve : considérons l'application ϕ_1 définie par

$$\phi_1(\cdot) : \quad \mathbb{C} \to \mathcal{E}'_1$$
$$y_0 \mapsto \phi_1(y_0) = y(x; y_0, x_0)$$

où $y(x; y_0, x_0)$ est telle que

$$(1) \quad \frac{d}{dx} y(x; y_0, x_0) + a(x)\, y(x; y_0, x_0) = 0 \quad \underline{\underline{\text{et}}} \quad y(x_0; y_0, x_0) = y_0$$

Ainsi, ϕ_1 est une application qui à tout $y_0 \in \mathbb{C}$ associe la fonction $y(x; y_0, x_0)$ de la variable réelle x qui satisfait le problème de Cauchy formé par l'EH (E_1') <u>et</u> la CI $y(x_0; y_0, x_0) = y_0$.

Notons tout d'abord que l'on a, par le théorème de Cauchy - Lipschitz,

i) à tout $y_0 \in \mathbb{C}$ correspond une unique image $\phi_1(y_0)$, ie une unique solution de (E_1') satisfaisant en plus la condition initiale y_0

$\Rightarrow$ cela montre que ϕ_1 est <u>injective</u>

ii) toute solution de (E_1') satisfaisant en plus la CI y_0 admet un unique antécédent $y_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ cela montre que ϕ_1 est <u>surjective</u>

Ainsi, le théorème de Cauchy - Lipschitz nous assure que l'application ϕ_1 est une <u>bijection</u> de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{E}_1'$.

Montrons à présent que ϕ_1 est de plus linéaire.

Soient donc λ, y_0 et $\tilde{y}_0$ trois complexes. Par définition de ϕ_1, on a

$$\phi_1(\lambda y_0 + \tilde{y}_0) = y(x; \lambda y_0 + \tilde{y}_0, x_0) \qquad (2)$$

avec

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} y(x; \lambda y_0 + \tilde{y}_0, x_0) + a(x)\, y(x; \lambda y_0 + \tilde{y}_0, x_0) = 0 \\ y(x_0; \lambda y_0 + \tilde{y}_0, x_0) = \lambda y_0 + \tilde{y}_0 \end{cases}$$

De plus, on a

$$\lambda \phi_1(y_0) + \phi_1(\tilde{y}_0) = \lambda y(x; y_0, x_0) + y(x; \tilde{y}_0, x_0) \qquad (3)$$

avec

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} y(x; y_0, x_0) + a(x)\, y(x; y_0, x_0) = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad y(x_0; y_0, x_0) = y_0 \\ \dfrac{d}{dx} y(x; \tilde{y}_0, x_0) + a(x)\, y(x; \tilde{y}_0, x_0) = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad y(x_0; \tilde{y}_0, x_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\Big[\lambda y(x; y_0, x_0) + y(x; \tilde{y}_0, x_0)\Big] + a(x)\Big[\lambda y(x; y_0, x_0) + y(x; \tilde{y}_0, x_0)\Big] = 0 \\ \lambda y(x_0; y_0, x_0) + y(x_0; \tilde{y}_0, x_0) = \lambda y_0 + \tilde{y}_0 \end{cases}$$

Ainsi, on voit que les fonctions $\lambda y(x; y_0, x_0) + y(x; \tilde{y}_0, x_0)$ et $y(x; \lambda y_0 + \tilde{y}_0)$ satisfont la même ED (à savoir l'EH (E_1')) et la même CI $\lambda y_0 + \tilde{y}_0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure donc que ces deux fonctions sont égales,

$$y(x; \lambda y_0 + \tilde{y}_0, x_0) = \lambda y(x; y_0, x_0) + y(x; \tilde{y}_0, x_0)$$

et on obtient donc de (2) et (3)

$$\phi_1(\lambda y_0 + \tilde{y}_0) = \lambda\,\phi_1(y_0) + \phi_1(\tilde{y}_0)$$

ce qui montre bien que ϕ_1 est <u>linéaire</u>.

Ainsi, l'application ϕ_1 est à la fois bijective et linéaire, et est donc un <u>isomorphisme</u> du $\mathbb{C}$-EV $\mathbb{C}$ dans le $\mathbb{C}$-EV $\mathcal{E}'_1$. Ceci assure donc que les deux espaces $\mathbb{C}$ et $\mathcal{E}'_1$ doivent avoir la même dimension. Or, puisque le $\mathbb{C}$-EV $\mathbb{C}$ a dimension 1 (car vu sur $\mathbb{C}$, si on voit plutôt $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ alors $\mathbb{C}$ a dimension 2), il doit donc en être de même pour $\mathcal{E}'_1$, soit

$$\dim \mathcal{E}'_1 = 1$$

<u>NB</u> : cette conclusion est uniquement valable dans le cas où l'EH (E'_1) admet une solution non-triviale sur l'intervalle $J \subset \mathbb{R}$. Il peut très bien arriver, dépendant de la forme de la fonction $a(x)$, que l'EH (E'_1) n'admette <u>aucune</u> solution sur $J \subset \mathbb{R}$ autre que la fonction identiquement nulle. Il est donc important de bien spécifier l'intervalle de valeurs de la variable x sur lequel on souhaite résoudre l'EH (E'_1). Dans les cas où (E'_1) n'admet aucune solution non-triviale sur $J \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{E}'_1$ est l'espace nul, et a donc dimension 0.

Exo 2 : on se concentre ici sur les ED du premier ordre (E_1) et (E'_1), qu'on rappelle ici

(2₁)

$$\begin{cases} y' + a(x)\, y = b(x) & (E_1) \\ y' + a(x)\, y = 0 & (E'_1) \end{cases}$$

1) On souhaite trouver la solution générale de l'EH (E'_1).
Pour ce faire, on part de l'ansatz

$$y_h(x) = C\, e^{-A(x)} \qquad (1)$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante et $A(x)$ est une primitive de la fonction $a(x)$, ie

$$\frac{dA}{dx} = a(x)$$

Dérivons donc (1) par rapport à x, on obtient

$$y'_h = -\frac{dA}{dx}\, C\, e^{-A(x)} = -a(x)\, y_h$$

soit

$$y'_h + a(x)\, y_h = 0$$

Ainsi, la fonction y_h donnée par (1) satisfait effectivement l'EH (E'_1). Or, on a vu dans l'exo 1 que l'espace $\mathcal{E}'_1$ des solutions de (E'_1) est un $\mathbb{C}$-EV de dimension 1, on peut donc écrire

$$\mathcal{E}'_1 = \mathrm{Vect}\left(e^{-A(x)}\right)$$

En d'autres termes, $\{e^{-A(x)}\}$ forme une base de $\mathcal{E}'_1$. Cela montre que la solution générale y_h de l'EH (E'_1) est bien de la forme (1).

<u>NB</u> : la constante C dans (1) est ensuite fixée par la CI $y(x_0) = y_0$, afin d'obtenir l'unique solution y_h au problème de Cauchy considéré pour l'EH (E_1'). Si l'on considère l'EI (E_1), on attend d'avoir trouvé une solution particulière de (E_1), et seulement <u>après</u> on prend la CI.

2) Après la solution générale de l'EH (E_1'), on souhaite maintenant trouver la solution générale de l'EI (E_1). Notons déjà que

<u>Théorème</u> : la solution générale y de l'EI (E_1) peut s'obtenir à partir d'une solution <u>particulière</u> y_p de (E_1) et de la solution générale $y_h(x) = C e^{-A(x)}$ de l'EH (E_1'), et on a

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) \qquad (2)$$

<u>preuve</u> : $$y' + a(x)y = \underbrace{y_p' + a(x)y_p}_{=b(x)} + \underbrace{y_h' + a(x)y_h}_{=0} = b(x)$$

et on voit donc bien que la fonction $y = y_p + y_h$ satisfait l'EI (E_1) ☒

Puisque l'on connaît déjà la solution homogène y_h (donnée par (1)), la question est maintenant de trouver une solution particulière y_p de l'EI (E_1). Une méthode générale existe pour trouver une telle solution particulière :

la méthode de la variation de la constante.

L'idée est de chercher une solution particulière y_p de (E_1) de la forme

$$y_p(x) = C(x)\, e^{-A(x)} \tag{3}$$

où $C(x)$ est maintenant une fonction de x. Par hypothèse, y_p doit être solution de l'EI (E_1), ie

$$y_p' + a(x)\, y_p = b(x) \tag{4}$$

On substitue l'ansatz (3) dans (4), et on voit alors que la fonction $C(x)$ doit satisfaire

$$C'(x) = b(x)\, e^{A(x)}$$

soit

$$C(x) = \int^x dx'\, b(x')\, e^{A(x')}$$

Une solution particulière de l'EI (E_1) est donc donnée par

$$y_p(x) = e^{-A(x)} \int^x dx'\, b(x')\, e^{A(x')} \tag{5}$$

Ainsi, en combinant (2) avec (1) et (5), on voit que la solution générale y de l'EI (E_1) peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \int^x dx'\, b(x')\, e^{A(x')} + C\, e^{-A(x)}} \tag{6}$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante arbitraire (se déterminant avec la CI) et $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

NB : on a donc réduit le problème de résoudre l'ED (E_1) au calcul de deux primitives :

i) la primitive $A(x) = \int^x dx'\, a(x')$

ii) la primitive $\int^x dx'\, b(x')\, e^{A(x')}$

Cette réduction est d'importance, car il est typiquement plus facile (notamment d'un point de vue numérique) de calculer une intégrale plutôt que de résoudre une ED.

3) On considère maintenant l'ED

$$x y' + y = 0 \tag{7}$$

La première étape est de réécrire (7) sous la forme (E'_1). Pour ce faire, on doit diviser par x, et donc supposer

$$x \neq 0$$

Dans ce cas, on obtient l'ED normalisée (ie où le coefficient de y' vaut 1)

$$y' + \frac{1}{x} y = 0 \tag{8}$$

qui est donc de la forme de (E'_1) avec $a(x) = 1/x$.
On utilise alors les résultats précédents, et on sait que la solution générale de (8) est, d'après (1),

$$y(x) = C \exp\left(- \int^x \frac{dx'}{x'} \right) = C\, e^{-\ln|x|}$$

soit

$$y(x) = \frac{C}{|x|}$$

Ainsi, la solution générale de l'ED (7) est :

i) $y(x) = \frac{C}{x}$ sur $]0, \infty[$, avec $C \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ dans ce cas, l'espace des solutions sur $]0, \infty[$ est donc $\mathcal{E}'_1 = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{x}\right)$ et a dimension 1

ii) $y(x) = \frac{C}{x}$ sur $]-\infty, 0[$, avec $C \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ l'espace des solutions sur $]-\infty, 0[$ est donc également $\mathcal{E}'_1 = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{x}\right)$, et a dimension 1

Notons cependant qu'un problème se pose lorsque l'on recherche une solution de l'ED (7) sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, une telle solution devrait alors être de la forme $\frac{C}{x}$ sur $]-\infty, 0[$, $\frac{\tilde{C}}{x}$ sur $]0, \infty[$ et de plus continue en $x = 0$, ce qui est impossible. La seule solution de (7) sur $\mathbb{R}$ est donc la solution triviale $y \equiv 0$. L'espace des solutions de l'ED (7) sur $\mathbb{R}$ est donc l'espace nul, de dimension 0.

4) Soit maintenant l'ED

$$2x(1-x)\,y' + (1-x)\,y = 1 \qquad (9)$$

Ici encore, on ramène d'abord (9) à une ED normalisée, ce qui nécessite de supposer

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1$$

On divise alors (9) par $2x(1-x)$ pour obtenir

$$y' + \frac{1}{2x} y = \frac{1}{2x(1-x)} \qquad (10)$$

qui est de la forme (E_1) avec

$$a(x) = \frac{1}{2x} \qquad \text{et} \qquad b(x) = \frac{1}{2x(1-x)}$$

On utilise les résultats précédents, et, d'après (6), la solution générale de l'ED (10) est donnée par

$$y(x) = e^{-\int^x \frac{dx'}{2x'}} \int^x \frac{dx'}{2x'(1-x')} e^{\int^{x'} \frac{dx''}{2x''}} + C e^{-\int^x \frac{dx'}{2x'}} \qquad (11)$$

Clairement, on a

$$\int^x \frac{dx'}{x'} = \ln|x|$$

et on a donc pour (11)

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \int^x \frac{dx'}{2x'(1-x')} \sqrt{|x'|} + \frac{C}{\sqrt{|x|}} \qquad (12)$$

On doit à présent distinguer les trois cas $x \in]1, \infty[$, $x \in]0, 1[$ et $x \in]-\infty, 0[$ afin de calculer la primitive restante dans (12).

$\boxed{x \in]1, \infty[}$ dans ce cas, on a en particulier $x > 0$, d'où $|x'| = x'$ et donc

$$\int^x \frac{dx'}{2x'(1-x')} \sqrt{|x'|} = \int^x \frac{dx'}{2\sqrt{x'}(1-x')}$$

On effectue le changement de variable $x' \to u$ avec

$$u = \sqrt{x'} \quad ; \quad du = \frac{dx'}{2\sqrt{x'}}$$

2, 4

puis une décomposition en éléments simples pour avoir

$$\int^{x} \frac{dx'}{2\sqrt{x'}\,(1-x')} = \frac{1}{2}\int^{\sqrt{x}} du \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$$

On voit donc que la solution (12) est dans ce cas

$$(13) \qquad \boxed{y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) + \frac{c}{\sqrt{x}} \quad , \quad x \in \,]1, \infty[}$$

$\boxed{x \in \,]0,1[}$ dans ce cas on a toujours $x > 0$, mais cette fois $\sqrt{x} - 1 < 0$, ce qui conduit à la solution

$$(14) \qquad \boxed{y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left(\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right) + \frac{c}{\sqrt{x}} \quad , \quad x \in \,]0,1[}$$

$\boxed{x \in \,]-\infty, 0[}$ dans ce cas on a $x < 0$ ie $|x'| = -x'$ et donc

$$\int^{x} \frac{dx'}{2x'\,(1-x')} \sqrt{|x'|} = - \int^{x} \frac{dx'}{2\sqrt{-x'}\,(1-x')}$$

On effectue un premier changement de variable $x' \to u$,

$$u = -x' \quad ; \quad du = -dx'$$

pour avoir

$$\int^{x} \frac{dx'}{2x'(1-x')}\sqrt{|x'|} = \int^{|x|} \frac{du}{2\sqrt{u}\,(1+u)}$$

On effectue maintenant un deuxième changement de variable $u \to v$ avec

$$v = \sqrt{u} \quad ; \quad dv = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

pour obtenir

$$\int^{x} \frac{dx'}{2x'(1-x')}\sqrt{|x'|} = \int^{\sqrt{|x|}} \frac{dv}{1+v^2} = \mathrm{Arctan}\sqrt{|x|}$$

On voit donc que la solution (12) est dans ce cas

$$(15) \quad \boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{-x} + \frac{c}{\sqrt{-x}} \quad , \quad x \in \left]-\infty, 0\right[}$$

Notons maintenant que les solutions (14) (sur $]0,1[$) et (15) (sur $]-\infty, 0[$) ne sont pas définies (et à fortiori pas continues) en $x = 0$. Ainsi, l'ED (9) n'admet pas de solution sur $]-\infty, 1[$.

De la même manière, les solutions (13) (sur $]1, \infty[$) et (14) (sur $]0, 1[$) ne sont pas définies en $x = 1$. Ainsi, l'ED (9) n'admet pas de solution sur $]0, \infty[$.

Exo 3 : on se concentre à présent sur les ED du deuxième ordre (E_2) et (E_2'), qu'on rappelle ici (3,1)

$$\begin{cases} y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x) & (E_2) \\ y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 & (E_2') \end{cases}$$

1) On veut d'abord montrer qu'en connaissant une solution particulière y_1 de l'EH (E_2'), on peut obtenir la solution générale de l'EI (E_2). Pour ce faire, supposons que cette dernière soit de la forme

$$y(x) = z(x)\, y_1(x) \qquad (1)$$

où $z(x)$ est une fonction à déterminer. Puisque y_1 est par hypothèse solution de (E_2'), on a alors l'équivalence

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1\, z'' + (2y_1' + a(x)\,y_1)\, z' = c(x)$$

cette dernière ED ne faisant pas intervenir z. Ainsi, si l'on pose

$$Z(x) = z'(x) \qquad (2)$$

on voit que résoudre l'EI (E_2) revient à résoudre l'ED du premier ordre pour la fonction Z

$$y_1\, Z' + (2y_1' + a(x)\,y_1)\, Z = c(x) \qquad (3)$$

L'ED (3) peut maintenant (en principe : ie on doit toujours calculer des primitives) être résolue avec les méthodes de l'exo 1.

Supposons maintenant en particulier que la fonction y_1 (solution particulière de l'EH (E_2')) ne s'annule pas sur un intervalle $J \subset I \subset \mathbb{R}$, ie

$$y_1(x) \neq 0 \quad , \quad \forall x \in J \subset I \tag{4}$$

et localisons nous sur l'EH (E_2'). Alors, comme on vient de voir, la fonction $y = z y_1$ est solution de (E_2') si z satisfait l'ED (3) sans second membre, ie

$$y_1 z'' + (2y_1' + a(x) y_1) z' = 0$$

soit, en divisant par y_1 (ce qui est précisément permis grâce à l'hypothèse (4)),

$$z'' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + a(x)\right) z' = 0 \tag{5}$$

En posant, comme en (2), $Z = z'$, on obtient donc

$$Z' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + a(x)\right) Z = 0 \tag{6}$$

qui est une ED homogène de la forme (E_1'). On sait donc d'après la question 1) de l'exo 2 que la solution générale de (6) est de la forme

$$Z(x) = C \exp\left\{ - \int^x dx' \left[2 \frac{y_1'(x')}{y_1(x')} + a(x') \right] \right\}$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante. On a donc pour Z

$$Z(x) = \frac{C}{y_1^2(x)} e^{-\int^x dx' a(x')} \tag{7}$$

Ainsi, puisque par construction $z = \mathfrak{z}'$, on voit que la fonction $\mathfrak{z}$ peut s'exprimer comme la primitive

$$\mathfrak{z}(x) = \int^{x} dx' \, z(x') = \int^{x} dx' \, \frac{c}{y_1^2(x')} \, e^{-\int^{x'} dx'' \, a(x'')} \qquad (8)$$

Dès lors, puisque avec (7) on voit directement que la fonction z ne s'annule pas identiquement sur l'intervalle J (l'exponentielle étant toujours non nulle), on sait donc que $\mathfrak{z}(x)$ n'est pas une constante. Ainsi, la fonction $y = \mathfrak{z}\, y_1$ n'est <u>pas</u> proportionnelle à y_1, et les deux fonctions y_1 et $\mathfrak{z}\, y_1$ doivent être linéairement indépendantes. Or, y_1 (par hypothèse) et $y = \mathfrak{z}\, y_1$ (par construction) sont toutes deux solution de l'EH (E_2').

$\Rightarrow$ on a donc deux fonctions, linéairement indépendantes, et solution de la même EH (E_2') sur $J \subset I$: ainsi, l'EV $\mathcal{E}_2'$ des solutions de (E_2') sur J est de dimension 2, et peut s'écrire comme $\mathcal{E}_2' = \mathrm{Vect}\,(y_1, y)$.

2) Considérons maintenant l'EH du second ordre

$$x(x+2)\, y'' - 2(x+1)\, y' + 2y = 0 \qquad (9)$$

et utilisons les résultats de la question 1) ci-dessus. Pour cela on doit d'abord trouver une solution particulière y_1 de (9). On vérifiera que l'on peut prendre

$$y_1(x) = C x^2 \,, \qquad C \in \mathbb{C} \qquad (10)$$

Notons déjà que y_1 s'annule en $x = 0$: ainsi, les résultats de la question 1) s'appliquent pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$ ne contenant pas le point $x = 0$.

Déterminons maintenant une deuxième solution de (9), ce qui peut par exemple se faire de deux manières :

i) en utilisant la méthode discutée à la question 1) : on cherche une solution $y_2 = z y_1 = z x^2$, on réécrit (9) sous forme normalisée (donc pour $x \neq 0$ et $x \neq -2$), on calcule la primitive dans (7) (par exemple avec une décomposition en éléments simples) pour obtenir Z, puis on intègre Z pour obtenir z ;

ii) la forme polynômiale des coefficients de y'', y' et y dans (9) suggère de chercher une deuxième solution y_2 de la forme

$$y_2(x) = \alpha x + \beta$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. En substituant cette fonction dans (9), on voit que y_2 est solution de (9) lorsque les coefficients α et β satisfont

$$\alpha = \beta$$

Ainsi, une deuxième solution y_2 de (9) est de la forme

$$y_2(x) = \tilde{C}(x+1) \quad , \quad \tilde{C} \in \mathbb{C} \qquad (11)$$

Les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. La solution générale de (9) est donc de la forme

$$(12) \qquad \boxed{y(x) = C x^2 + \tilde{C}(x+1) \quad , \quad C, \tilde{C} \in \mathbb{C}}$$

qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$. La solution (12) est donc valide sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, y compris $\mathbb{R}$ lui-même.

3) Considérons maintenant l'ED inhomogène

$$(13) \qquad x(1-x)y'' + (2x^2-1)y' + 2(1-2x)y = 1-2x-x^2$$

Remarquons tout d'abord que la forme de (13) suggère de rechercher une solution particulière y_p de la forme

$$y_p(x) = \alpha x + \beta$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont à déterminer. En substituant cette fonction dans (13) on voit que α et β doivent satisfaire

$$\begin{cases} -2\alpha = -1 \\ 2\beta - \alpha = 1 \end{cases}$$

soit donc $\alpha = 1/2$ et $\beta = 3/4$. Ainsi, la fonction

$$y_p(x) = \frac{1}{4}(2x+3) \qquad (14)$$

est une solution particulière de l'ED inhomogène (13). Il nous reste donc simplement à trouver la solution générale de l'EH associée à (13), ie

$$x(1-x)y'' + (2x^2-1)y' + 2(1-2x)y = 0 \qquad (15)$$

Notons tout d'abord qu'une première solution y_1 de (15) est donnée par

$$y_1(x) = C x^2 \quad , \quad C \in \mathbb{C} \qquad (16)$$

Essayons également, pour la deuxième solution, l'ansatz

$$y_2(x) = \tilde{C} e^{\alpha x} \quad , \tilde{C} \in \mathbb{C}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ est à déterminer. En substituant cette fonction dans (15) on voit que α doit satisfaire

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-2) = 0 \\ \alpha^2 - 4 = 0 \\ 2-\alpha = 0 \end{cases}$$

ce qui est possible si et seulement si $\alpha = 2$. Une deuxième solution y_2 de (15) est donc donnée par

$$y_2(x) = \tilde{c}\, e^{2x} \quad , \quad \tilde{c} \in \mathbb{C} \tag{17}$$

En combinant les résultats (14), (16) et (17), on voit donc que la solution générale de (13) est de la forme

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}(2x+3) + c\,x^2 + \tilde{c}\, e^{2x} \quad , \quad c, \tilde{c} \in \mathbb{C}} \tag{18}$$

qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$. La solution (18) est donc valide sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, y compris $\mathbb{R}$ lui-même.

<u>Exo 4</u> : 1) Considérons à nouveau l'EH (E_2'), mais cette fois dans le cas particulier où les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ sont simplement des constantes, ie 4₁

$$a(x) = a \qquad \text{et} \qquad b(x) = b$$

On se retrouve donc avec l'EH à coefficients constants

$$y'' + a y' + b y = 0 \qquad (1)$$

A priori, les coefficients a et b dans (1) sont complexes. On se propose de rechercher des solutions de (1) de la forme

$$y(x) = e^{rx} \quad , \quad r \in \mathbb{C} \qquad (2)$$

En substituant l'ansatz (2) dans l'EH (1) on obtient

$$(r^2 + ar + b)\, e^{rx} = 0$$

soit, puisque $e^{rx} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (3)$$

Ainsi, la fonction (2) est solution de l'EH (1) si et seulement si le complexe r satisfait l'équation polynômiale du second ordre (3). Cette dernière est appelée <u>l'équation caractéristique</u> associée à l'EH (1).

$\Rightarrow$ trouver les solutions d'une EH du second ordre à coefficients constants revient à résoudre une équation polynômiale du second ordre, ce qui est toujours possible

Afin de résoudre (3), on doit donc distinguer deux cas, dépendant de la valeur du discriminant :

i) $\Delta \equiv a^2 - 4b \neq 0$: dans ce cas (3) admet deux solutions complexes distinctes ;

ii) $\Delta \equiv a^2 - 4b = 0$: dans ce cas (3) admet une racine complexe double.

$\boxed{a^2 - 4b \neq 0}$ dans ce cas les deux solutions distinctes de (3), notons les $r_\pm$, sont données par

$$r_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

La solution générale de l'EH (1) est donc dans ce cas une combinaison linéaire de $e^{r_+ x}$ et $e^{r_- x}$ (qui sont linéairement indépendantes puisque $r_+ \neq r_-$), ie

$$(4) \qquad \boxed{y = C_1 e^{r_- x} + C_2 e^{r_+ x} \quad , \quad a^2 \neq 4b}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

$\boxed{a^2 = 4b}$ dans ce cas la racine double de (3), notons la r_0, est donnée par

$$r_0 = -\frac{a}{2}$$

Ce cas est donc un peu plus compliqué que le cas $a^2 \neq 4b$, car ici l'ansatz (2) nous donne une seule solution particulière y_1 de l'EH (1), à savoir

$$y_1(x) = e^{r_0 x} = e^{-\frac{a}{2}x} \qquad (5)$$

Cependant, puisque l'on connaît une solution particulière y_1 de (1), qui en plus ne s'annule en aucune valeur de x, on peut utiliser la méthode discutée à la question 1) de l'exo 3 pour déterminer une deuxième solution y_2 de (1), qui sera linéairement indépendante de y_1. On cherche donc y_2 de la forme

$$y_2(x) = z(x)\, y_1(x)$$

avec $y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$. On a vu que z est donnée par la primitive

$$z(x) = \int^x \frac{dx'}{y_1^2(x')}\, e^{-\int^{x'} dx''\, a} = \int^x \frac{dx'}{\left(e^{-\frac{a}{2}x'}\right)^2}\, e^{-ax'} = \int^x dx'\, e^{ax'}\, e^{-ax'}$$

d'où directement

$$z(x) = x$$

Ainsi, une deuxième solution y_2 de (1) est donnée par

$$y_2(x) = x\, e^{r_0 x} = x\, e^{-\frac{a}{2}x} \qquad (6)$$

En combinant (5) et (6), on voit donc que dans le cas $a^2 = 4b$ la solution générale de l'EH (1) est une combinaison linéaire de $e^{r_0 x}$ et $x\, e^{r_0 x}$, avec $r_0 = -\frac{a}{2}$, ie

$$(7) \qquad \boxed{y = C_1\, e^{r_0 x} + C_2\, x\, e^{r_0 x}, \quad a^2 = 4b}$$

2) On considère maintenant $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique à coefficients constants, et $B = (B_i(x))_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur. On se place en dimension finie n.

<u>NB</u> : on suppose en plus que A est <u>réelle</u>, ie

$$A_{ij} \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall i,j$$

Cela nous assure que A est diagonalisable par une matrice orthogonale, ie on peut décomposer A sous la forme

$$A = O D O^T \tag{8}$$

où D est une matrice diagonale (dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A) et O est une matrice orthogonale (dont les colonnes sont les vecteurs propres de A), ie telle que

$$O^T = O^{-1} \tag{9}$$

⚠ une matrice symétrique complexe peut ne pas être diagonalisable ! Un contreexemple étant

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M - \lambda) = \lambda^2 \Rightarrow$$ M admet 0 comme unique valeur propre

On considère maintenant les systèmes d'équations différentielles linéaires couplées :

$$y_i' = A_{ij} y_j + B_i(x) \tag{S_1}$$

$$y_i'' + A_{ij} y_j = B_i(x) \tag{S_2}$$

où l'on a utilisé la convention de sommation d'Einstein.

a) On introduit, en plus de la matrice A et du vecteur B, le vecteur y défini par

4
3

$$y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \Rightarrow y'' = \begin{pmatrix} y''_1 \\ \vdots \\ y''_n \end{pmatrix}$$

En notant que

$$A y = \begin{pmatrix} A_{1j}\, y_j \\ \vdots \\ A_{nj}\, y_j \end{pmatrix}$$

on peut donc réécrire les systèmes (S_1) et (S_2) sous forme matricielle, et on a

$$(10) \quad \begin{cases} y' = A y + B \\ y'' + A y = B \end{cases}$$

b) On utilise maintenant le fait que la matrice A admette la décomposition (8). On introduit le vecteur

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

relié au vecteur y par

$$y = O z \qquad (11)$$

où O est la matrice orthogonale formée par les vecteurs propres de A. Or, puisque A est par hypothèse une matrice à coefficients constants, il en est de même pour la matrice O, et on a donc en dérivant (11) par rapport à x

$$y' = O z' \qquad \text{et} \qquad y'' = O z''$$

On peut alors réécrire (10) en termes de z, et on a

$$\begin{cases} O z' = A O z + B \\ O z'' + A O z = B \end{cases}$$

d'où, en multipliant des deux côtés à gauche par $O^T = O^{-1}$, et en remarquant sur (8) que $O^T A O = D$,

$$(12) \quad \begin{cases} z' = D z + O^T B & (12a) \\ z'' + D z = O^T B & (12b) \end{cases}$$

la matrice D étant par construction diagonale, les deux systèmes d'ED (12a) et (12b) sont maintenant <u>découplés</u> pour les composantes z_j de z. On résout donc (12a) et (12b) composante par composante pour trouver individuellement chaque z_j : ceci peut se faire grâce aux méthodes de l'exo 2 pour (12a), des exos 3 et 4 1) pour (12b).
Une fois qu'on a déterminé z, on en déduit y (ie la solution des systèmes couplés (S_1) ou (S_2)) simplement en calculant, par la définition (11),

$$y = O z$$

O et z étant maintenant connus.

3) On souhaite trouver la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'ED inhomogène

44

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x + x^2 - 1 \qquad (13)$$

Comme d'habitude, on commence par trouver la solution générale de l'EH associée, ie

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad (14)$$

Puisque l'on a des coefficients constants, on utilise la méthode discutée à la question 1). L'équation caractéristique associée à (14) est ici

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

de discriminant

$$\Delta = 4 - 4\times 2 = 4i^2 \neq 0$$

On a donc deux racines

$$r_\pm = 1 \pm i$$

Ainsi, la solution générale $y_h(x)$ de l'EH (14) est

$$y_h(x) = C_1 e^{(1-i)x} + C_2 e^{(1+i)x} \qquad (15)$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Il nous reste maintenant à trouver une solution particulière de l'EI (13). On utilise le théorème

<u>Théorème</u> : (principe de superposition)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de classe C^0 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si y_1 est une solution particulière sur I de l'ED inhomogène

$ay'' + by' + cy = f_1(x)$, et si y_2 est une solution particulière sur I de l'EI $ay'' + by' + cy = f_2(x)$, alors la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution particulière sur I de l'EI $ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Posons donc $f_1(x) = e^x \sin x$ et $f_2(x) = x^2 - 1$. Résoudre l'EI (13) revient donc à résoudre séparément les deux EI suivantes :

$$(16) \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x & (16a) \\ y'' - 2y' + 2y = x^2 - 1 & (16b) \end{cases}$$

<u>i) Résolution de (16a)</u> : recherchons une solution particulière y_1 de (16a) de la forme

$$y_1 = z e^x$$

En substituant cette ansatz dans (16a) on en tire une ED pour z qui est

$$z'' + z = \sin x$$

dont une solution particulière est

$$z(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$$

Ainsi, une solution particulière y_1 de (16a) est donnée par

$$y_1(x) = -\frac{1}{2} x \cos x \, e^x \qquad (17)$$

ii) <u>Résolution de (16b)</u> : on recherche cette fois une solution particulière y_2 de (16b) de forme polynômiale, plus précisément du degré 2, ie

4_5

$$y_2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

En substituant cette ansatz dans (16b), on voit alors que les coefficients α, β et γ doivent satisfaire

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ -4\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 2\gamma = -1 \end{cases}$$

soit $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ et $\gamma = 0$. Ainsi, une solution particulière y_2 de (16b) est donnée par

$$y_2(x) = \frac{x^2}{2} + x \tag{18}$$

On sait maintenant qu'une solution particulière y_p de l'EI (13) est donnée par la somme des deux solutions particulières y_1 et y_2 des EI (16a) et (16b), soit avec (17) et (18)

$$y_p(x) = y_1 + y_2 = -\frac{1}{2} x \cos x \, e^{x} + \frac{x^2}{2} + x \tag{19}$$

Ainsi, on connaît la solution générale y_h de l'EH (14), donnée par (15), <u>et</u> une solution particulière y_p de l'EI (13). La solution générale y de l'EI (13) est donc donnée par la somme $y_h + y_p$, ie avec (15) et (19),

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{(1-i)x} + C_2 e^{(1+i)x} - \frac{1}{2} x \cos x \, e^{x} + \frac{x^2}{2} + x \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}}$$

4) L'équation

$$m\ddot{x} + \zeta\dot{x} + kx = 0 \qquad (20)$$

décrit l'évolution temporelle d'une masse m soumise à un ressort de constante de raideur k ainsi qu'à une force de frottement $-\zeta\dot{x}$. Ici x désigne l'écart entre la position de la masse et sa position à l'équilibre. On distingue 3 régimes selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée à (20) : un régime périodique amorti, un régime critique ainsi qu'un régime apériodique.

L'équation

$$m\ddot{x} + \zeta\dot{x} + kx = F(t)$$

désigne ensuite un oscillateur harmonique amorti forcé, $F(t)$ désignant le forçage.

Exo 5 : on considère ici l'équation d'Euler

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \qquad (1)$$

où α et β sont des constantes (à priori complexes). On recherche des solutions de la forme

$$y = x^r$$

En substituant cet ansatz dans l'ED (1), on obtient

$$\left[r^2 + (\alpha - 1) r + \beta \right] x^r = 0$$

d'où, en supposant $x \neq 0$,

$$r^2 + (\alpha - 1) r + \beta = 0 \qquad (2)$$

Ainsi, la fonction $y = x^r$ est solution de l'ED (1) si et seulement si r satisfait l'équation polynômiale du second degré (2). Résoudre cette dernière nécessite de distinguer deux cas, dépendant de la valeur du discriminant :

i) $\underline{\Delta = (\alpha - 1)^2 - 4\beta \neq 0}$: dans ce cas (2) admet deux solutions complexes distinctes ;

ii) $\underline{\Delta = (\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0}$: dans ce cas (2) admet une racine complexe double.

De plus, on rappelle que l'on a supposé $x \neq 0$: on doit donc résoudre l'ED (1) séparément pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

$\boxed{\text{Cas } x > 0}$

i) $4\beta \neq (\alpha-1)^2$: dans ce cas (2) admet deux solutions distinctes $r_\pm$ données par

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left[1-\alpha \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta} \right]$$

La solution générale de l'équation d'Euler (1) est alors une combinaison linéaire de x^{r_+} et x^{r_-} (linéairement indépendantes car $r_+ \neq r_-$), ie

$$\boxed{y = C_1 x^{r_+} + C_2 x^{r_-} = C_1 e^{r_+ \ln x} + C_2 e^{r_- \ln x}} \qquad (3)$$

ii) $4\beta = (\alpha-1)^2$: dans ce cas (2) admet une racine double r_0 donnée par

$$r_0 = \frac{1-\alpha}{2} \qquad (4)$$

L'ansatz $y = x^r$ nous fournit donc une seule solution de l'équation d'Euler, à savoir

$$y_1(x) = x^{r_0} \qquad (5)$$

On utilise alors la méthode de la question 2) de l'exo 3 afin de déterminer une deuxième solution y_2 de (1) de la forme

$$y_2 = z\, y_1$$

On a vu que z est alors donnée par la primitive

$$z(x) = \int^x \frac{dx'}{y_1^2(x')} e^{-\int^{x'} dx'' \, a(x'')}$$

(5₂)

où $a(x'')$ est ici le coefficient de y' dans l'ED <u>normalisée</u> obtenue à partir de (1), ie ici

$$a(x) = \frac{\alpha}{x}$$

On a donc, avec (4) et (5),

$$z(x) = \int^x \frac{dx'}{x'^{2r_0}} e^{-\int^{x'} dx'' \frac{\alpha}{x''}} = \int^x dx' \, x'^{\alpha-1} e^{-\alpha \ln x'}$$

$$= \int^x dx' \, x'^{\alpha-1-\alpha} = \int^x \frac{dx'}{x'} = \ln x$$

Ainsi, une deuxième solution y_2 de (1) est donnée par

$$y_2(x) = x^{r_0} \ln x \tag{6}$$

En combinant (5) et (6), on voit donc que dans le cas $4\beta = (\alpha-1)^2$ la solution générale de l'équation d'Euler (1) est une combinaison linéaire de x^{r_0} et $x^{r_0} \ln x$, avec $r_0 = (1-\alpha)/2$, et

$$\boxed{y(x) = c_1 x^{r_0} + c_2 x^{r_0} \ln x = c_1 e^{r_0 \ln x} + c_2 \ln x \, e^{r_0 \ln x}} \tag{7}$$

Considérons maintenant le cas $x < 0$.

$\boxed{\text{Cas } x < 0}$

On vérifiera que les résultats précédents (3) et (7) restent valables à condition de remplacer x par $-x$, ie par $|x|$.

$\Rightarrow$ on peut donc combiner les deux cas $x > 0$ et $x < 0$, et on voit alors que la solution générale de l'équation d'Euler (1) sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne contenant pas le point $x = 0$ est donnée par

$$\boxed{\begin{gathered} y = C_1 |x|^{r_+} + C_2 |x|^{r_-} = C_1 e^{r_+ \ln|x|} + C_2 e^{r_- \ln|x|} \\ \text{lorsque} \quad \beta \neq \frac{(\alpha-1)^2}{4} \end{gathered}}$$

avec $r_\pm = \frac{1}{2}\left[1 - \alpha \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}\right]$, et par

$$\boxed{\begin{gathered} y = C_1 |x|^{r_0} + C_2 \ln|x| \, |x|^{r_0} = C_1 e^{r_0 \ln|x|} + C_2 \ln|x| \, e^{r_0 \ln|x|} \\ \text{lorsque} \quad \beta = \frac{(\alpha-1)^2}{4} \end{gathered}}$$

avec $r_0 = \frac{1-\alpha}{2}$

Notons cependant que ces solutions ne sont à priori pas continues en $x = 0$. Ainsi, on n'aura en général pas de solutions de l'équation d'Euler (1) sur $\mathbb{R}$.